|  |
| --- |
| Appunti di  Analisi Matematica  (serie numeriche) |
|  |
| Rosario Terranova |
|  |
|  |
|  |

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | <https://rosarioterranova.github.io/> | |

Sommario

[Metodo Matematico 2](#_Toc410122346)

[Teoremi 2](#_Toc410122347)

[Teorie 3](#_Toc410122348)

[Implicazioni 3](#_Toc410122349)

[Numeri reali 4](#_Toc410122350)

[Insiemi 4](#_Toc410122351)

[Insiemi numerici 4](#_Toc410122352)

[Proprietà dei numeri reali 5](#_Toc410122353)

[Radice aritmetica e potenze 7](#_Toc410122354)

[Funzioni 8](#_Toc410122355)

[Funzioni goniometriche 9](#_Toc410122356)

[Successioni di numeri reali e suoi limiti 11](#_Toc410122357)

[Intervalli ed intorni 11](#_Toc410122358)

[Successioni 12](#_Toc410122359)

[Limiti di successioni 13](#_Toc410122360)

[Teoremi sui limiti 14](#_Toc410122361)

[Algebra dei limiti 15](#_Toc410122362)

[Limiti notevoli 19](#_Toc410122363)

[Serie di numeri reali 21](#_Toc410122364)

[Il carattere di una serie 21](#_Toc410122365)

[Serie a termini reali di segno costante 23](#_Toc410122366)

[Serie a termini di segno alterno 26](#_Toc410122367)

[Convergenza assoluta, serie logaritmica e serie esponenziale 27](#_Toc410122368)

# Metodo Matematico

La matematica, come ogni altra disciplina scientifica, utilizza oltre al linguaggio comune un proprio linguaggio che serve a rendere con precisione e brevità le proposizioni riguardanti gli enti di cui si occupa. Esso fa largo uso di simboli e abbreviazioni come:

* C.N. 🡪 condizione necessaria, senza la quale il resto non ha senso;
* C.S. 🡪 condizione sufficiente;
* C.N.S. 🡪 condizione necessaria e sufficiente;
* c.v.d. 🡪 come volevasi dimostrare

*Es*. Per passare al secondo anno in corso (ipotesi) serve essere iscritti al primo anno (C.N.) ed avere 30 crediti (C.S.)

## Teoremi

Importante funzione nella formulazione di preposizioni matematiche sono i **teoremi**, preposizioni che, a partire da condizioni iniziali arbitrariamente stabilite, traggono delle conclusioni attraverso una sequenza finita di implicazioni logiche, dandone una dimostrazione. Un teorema è composto da:

* Una o più **ipotesi**, ovvero le condizioni iniziali su cui si vuole ragionare, esse sono puramente arbitrarie e non hanno motivo di essere dimostrate;
* Una **tesi**, la conseguenza delle ipotesi, in un teorema tutte le volte che si verificano le condizioni iniziali descritte nelle ipotesi allora si verifica anche la tesi;
* Una **dimostrazione della tesi**, cioè un insieme di implicazioni logiche che possano assicurare che le ipotesi implichino la tesi. Per ottenere una dimostrazione soddisfacente possono essere seguiti diversi schemi dimostrativi come:
  + *Dimostrazione costruttiva*: La dimostrazione costruttiva si svolge utilizzando le condizioni iniziali delle ipotesi per ottenere, tramite una serie di implicazioni logiche, le condizioni della tesi.

*Es.* Se volessimo dimostrare in modo costruttivo che se si prendono due numeri pari a e b (ipotesi) allora la loro somma a + b sarà anch'essa un numero pari (tesi) possiamo dire che il fatto che a e b siano pari implica che li si possa scrivere come a = 2×n e b = 2×m, questo implica che la loro somma sia uguale ad a + b = 2×n + 2×m = 2×(n + m) che è un numero pari (dimostrazione).

Partendo dall'ipotesi, attraverso una serie di implicazioni logiche abbiamo ottenuto la tesi.

* + *Dimostrazione per assurdo*: La dimostrazione per assurdo viene fatta ipotizzando che la tesi sia sbagliata e dimostrando che una tesi sbagliata implichi delle asserzioni che entrano in contrasto con le ipotesi.

*Es*. Se volessimo dimostrare per assurdo che se si prendono due numeri reali a e b diversi da 0 (ipotesi) allora la loro somma a + b sarà diversa dalla loro differenza a - b (tesi) ipotizziamo che la tesi sia sbagliata e quindi che la somma dei due numeri sia uguale alla loro differenza: a + b = a - b, questo implica che a + b - a = -b che a sua volta implica che b=-b ma questo, nell'insieme dei numeri reali, è vero solo se b è uguale a 0 e questo è assurdo perché in contrasto con l'ipotesi che a e b siano diversi da zero (dimostrazione).

Abbiamo negato la tesi e, tramite delle implicazioni logiche, abbiamo ottenuto delle condizioni che entrano in contrasto con le ipotesi.

* + *Dimostrazione per induzione*: utilizzata per i teoremi che asseriscono che gli elementi di un certo insieme numerabile posseggono una particolare proprietà. Se si riesce a dimostrare che il teorema vale per il primo elemento dell'insieme e che, se il teorema vale per un elemento qualsiasi, allora vale anche per il successivo allora la tesi è stata dimostrata.

Un teorema tipico potrebbe essere: (ovvero da A segue B, dal quale segue C, dal quale segue D). In questo caso, A è un’**assioma o postulato** del sistema, ovvero una proposizione non dimostrata (e non dimostrabile per definizione) ma assunta per vera in quanto ritenuta evidente o comunque indispensabile nello sviluppo assiomatico di un sistema. Non può esistere un sistema totalmente privo di assiomi.

## Teorie

Un teorema matematico può anche essere inteso come un enunciato che viene dimostrato nell'ambito di una **teoria formale** (come ogni altra proposizione derivabile dagli assiomi della teoria mediante un procedimento dimostrativo) e che in un'esposizione sistematica della teoria viene presentato come risultato di rilievo. Le implicazioni logiche di una teoria vengono chiamate:

* **Corollari** se dimostrati grazie alle implicazioni di un teorema; solo la conseguenza di una teoria;
* **Lemmi** se le loro implicazioni sono necessarie per la dimostrazione di un teorema.

Si usa inoltre il termine **proposizione** per tutte quelle implicazioni logiche tra due predicati che hanno una rilevanza inferiore a quella di un teorema.

Tutte quelle affermazioni ritenute vere ma per le quali non si dispone di una dimostrazione soddisfacente vengono chiamate **congetture**.

Infine, si dice **legge** una relazione matematica estrapolata a partire da dati empirici e in grado di spiegare con un sufficiente grado di precisione un'osservazione sperimentale.

## Implicazioni

Diremo che la preposizione P implica Q se ogni qualvolta P è vera, è vera anche Q, e scriveremo .

*C.N.* affinché P sia vera è che lo sia Q, *C.S.* affinché Q sia vera è che lo sia P. Se e , allora , ovvero P è vera **se e solo se** lo è anche Q. *C.N.S.* affinché P sia vera è che Q sia vera.

# Numeri reali

## Insiemi

Concetto primitivo intuitivamente noto.

x è un elemento, è l’appartenenza, A è l’insieme

* **UNIONE**: (un elemento è preso una volta sola)
* **INTERSEZIONE**: (elementi comuni)
* **COMPLEMENTARE**:
* **SOTTOINSIEME**:
* **SOTTOINSIEME** **STRETTO**:
* **INSIEME DELLE PARTI**: insieme formato da tutti i possibili sottoinsieme dell’insieme dato. Numero di sottoinsiemi dato da dove n sono il numero degli elementi dell’insieme.

*Es*. sottoinsiemi

## Insiemi numerici

Siano noti i seguenti insiemi numerici:

* **Numeri naturali**
* **Numeri interi o relativi**
* **Numeri razionali** (numero espresso come rapporto di due numeri relativi, cioè sotto forma di frazione) (essi comprendono i numeri decimali con un numero finito di cifre, e i numeri decimali con un numero infinito di cifre periodiche)

Ma è chiaro che si potrebbe considerare il simbolo seguente 0,10100100010000100000…

che non è numero decimale periodico, ma un nuovo ente. Da qui la necessità di un nuovo insieme che contenga .

Per colmare le lacune presenti in una qualunque teoria che volesse descrivere la realtà solo facendo uso dei numeri razionali , è stato necessario considerare una più vasta classe di numeri, i cosiddetti **numeri reali** .

* **Numeri reali** **:** Denoteremo con l’insieme costituito dallo e da ogni simbolo del tipo

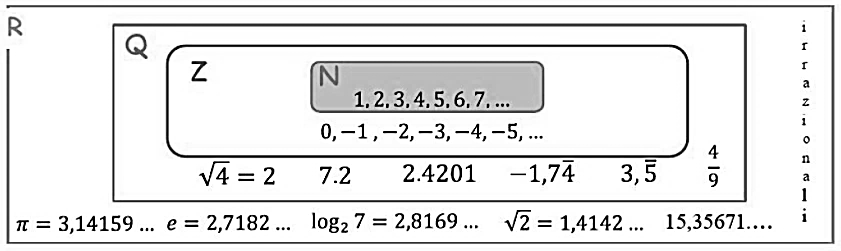
Essendo arbitrariamente scelto e cifre arbitrariamente scelte, con la sola condizione che almeno uno dei due numeri e sia non nullo (di valore noto). Chiameremo **numeri reali** gli elementi di tale insieme. sarà detto **parte interna** del numero, mentre sarà detto **i-esima cifra** **decimale**.

Da tale definizione è ovvio che ogni numero razionale è un numero reale, ma esistono numeri reali che non sono razionali: questi numeri verranno chiamati **irrazionali .**

* **Numeri irrazionali :** Un numero reale si dice irrazionale quando non può essere espresso come rapporto di due numeri relativi, cioè se non può esser espresso sotto forma di frazione. Essi sono formati da una parte intera e da una parte decimale con infinite cifre non periodiche.

Quando un numero reale è razionale avremo

Quando un numero reale è irrazionale avremo



L’insieme dei numeri razionali e irrazionali formano i numeri reali.

## Proprietà dei numeri reali

Numeri reali uguali

Siano . Diremo che x e y sono **uguali**, e scriveremo x=y, quando se uno dei due è lo zero anche l’altro lo è,

oppure nel caso in cui uno (o entrambi) siano diversi da zero, quando essi hanno lo stesso segno, stessa parte intera

e cifre decimali ordinatamente uguali.

* Proprietà Riflessiva:
* Proprietà Simmetrica:
* Proprietà Transitiva:

Numeri reali positivi e negativi

Chiameremo **positivi** i numeri reali aventi segno “+” e **negativi** i numeri reali aventi segno “-“. Denoteremo con

l’insieme dei numeri reali positivi e con l’insieme dei numeri reali negativi. Con (risp. ) denoteremo

l’insieme dei numerali reali non negativi (risp. non positivi) incluso lo zero.

Ordinamento in

Sia ; diremo allora che x è **maggiore** di 0 o che 0 è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli

o , rispettivamente.

Sia ; diremo allora che x è **minore** di 0 o che 0 è **maggiore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli o , rispettivamente.

Siano e ; diremo allora che x è **maggiore** di y o che y è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno

dei simboli o , rispettivamente.

Siano , fra loro non uguali; diremo allora che x è **maggiore** di y o

che y è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli o , rispettivamente, se (in )

oppure se ed esiste tale che (in ) mentre (in ) .

Siano , fra loro non uguali; diremo allora che x è **maggiore** di y o che y è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli o , rispettivamente, se .

Infine diremo che x è **maggiore o uguale** ad y (risp. che y è **minore o uguale** ad x) se accade che

oppure che (risp. ); scriveremo in questo caso (risp. ).

Troncatura

Dato un numero reale decimale non negativo si chiama **troncatura** a livello , il numero reale .

Valore assoluto (o modulo)

Dato un numero reale *x* si chiama **valore assoluto** di *x*, e si denota con , il numero seguente

*Es.* Risolvere l’equazione pongo l’argomento del modulo maggiore o uguale a zero

* se considero
* se considero

Ho due soluzioni: e .

Maggioranti

Sia un sottoinsieme . Si diche che un numero reale k è un **maggiorante** di A se

Stesso ragionamento per un minorante. I minoranti e i maggioranti non sono unici, ma sono insiemi.

Insieme limitato

L’insieme A si dice

* **Limitato superiormente**: se esiste almeno un maggiorante
* **Limitato inferiormente**: se esiste almeno un minorante
* **Limitato**: se è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente

Massimo e minimo

Si dice che è il **massimo** di A e si scrive se ,

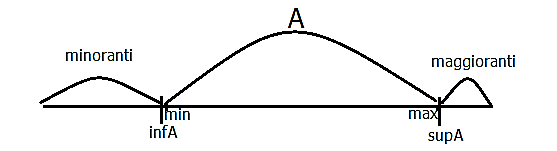
Stessa cosa per il minimo.

Estremi

L’estremo superiore di A si indica con supA ed è

* + se A non è limitato superiormente, cioè se non esistono maggioranti
* Il minimo dei maggioranti se A è limitato superiormente

Analogamente per il limite inferiore. Il limite, se esiste, è unico.



Es.

( aperto ), [ chiuso con num incluso ], ]chiuso con num escluso [

Proprietà dei numeri reali

* Proprietà commutativa:
* Proprietà associativa:
* Opposto:
* Reciproco:
* Proprietà distributiva:

Numero di Nepero (e)

In matematica, **e** è una costante che, insieme a pi greco (3,14159…), è tra le più importanti per via delle sue numerose applicazioni, in modo particolare nell'ambito dell'analisi matematica.

Poiché è un irrazionale, non è esprimibile come frazione o come numero decimale periodico: la sua approssimazione con 55 cifre decimali è 2,71828… Il numero e può essere definito in uno dei seguenti modi equivalenti:

Come valore del limite Come somma di una serie

Assioma di continuità

Siano e . Supponiamo che A sia tutto a sx di B, cioè . Allora



c può anche essere un insieme di elementi.

Assioma o principio di induzione

Supponiamo che sia data una perposizione . Inoltre, siano soddisfatte le due condizioni seguenti:

1. esista tale che sia vera
2. se è vera la generica proposizione , allora è vera la proposizione

Allora le proposizioni sono vere

Il vantaggio derivante dall’uso di tale Assioma è che, al fine di dimostrare la veridicità di infinite proposizioni, è sufficiente dimostrarne una sola e, poi, supposta vera la generica proposizione, conseguire la veridicità della proposizione successiva; cioè la dimostrazione delle infinite proposizioni può essere effettuata in due soli passi.

Operativamente, se voglio dimostrare che Pn è vera, allora devo dimostrare:

* Passo base: sostituisci e vedo se è vera
* Passo induttivo: assumo per ipotesi che Pn sia vera, ed usando questa informazione dimostro che anche è vera

*Es.* Dimostrare per induzione che

* Passo base: sostituendo n con 0 ottengo
* Passo induttivo: l’ipotesi dice di dimostrare con al posto di n, quindi la tesi sarà ottenere
* Dimostrazione passo induttivo:

Potenza di base reale ed esponente intero relativo

Dati si definisce la potenza di base reale ed esponente intero relativo ponendo

(n volte)

Sommatoria

Il simbolo si chiama **sommatoria** e la scrittura

si legge “somma di per n che va da h a k”.

Il simbolo invece si chiama **produttoria**, e la scrittura

si legge “prodotto di per n che va da h a k”.

Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale, indicato con il simbolo che si legge “n sopra h”, indica un numero razionale definito come segue

Essendo Il **fattoriale** di h, ovvero

## Radice aritmetica e potenze

Teorema di Esistenza ed Unicità della Radice n-esima Aritmetica di un numero positivo

Siano ed . Allora esiste un unico numero reale positivo *x* tale che . Tale numero viene detto **radice n-esima aritmetica** di a e viene denotato con .

Potenza di base reale positiva ed esponente razionale

Dati si definisce la **potenza di base reale positiva ed esponente razionale positivo** ponendo

Potenza di base reale negativa ed esponente reale

Siano , per definizione si pone

qualora sia possibile definire la potenza .

La radice con , è un numero intero oppure irrazionale.

Equazioni e disequazioni irrazionali

Si chiama equazione (risp. disequazione) irrazionale e si scrive

(risp. )

il problema di trovare (se esistono) numeri reali detti **soluzioni** tali che siano verificati le identità (risp. ordinazioni)

(risp. )

Il procedimento che serve per cercare di eliminare i radicali dalla disequazione e trasformarla in una disequazione reazionale si divide in quattro casi:

1. *n* ed *m* dispari. Si elevano ambo i membri a *p* per provare che per è soddisfatta la disuguaglianza
2. *n* pari ed *m* dispari. Essendo n pari occorre che sia positivo o nullo, inoltre dato il segno di diseguaglianza, ocore che anche lo sia. Dunque avremo il sistema
3. *n* dispari ed *m* pari. Essendo m pari occorre che ma se il numero al primo membro è positivo si ha

nel senso che l’insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è l’unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi.

1. *n* ed *m* pari. Occore che siano entrambi non nulli

Equazione esponenziale

Dati due numeri reali positivi a,b si chiama equazione esponenziale, e si denota con

il problema di trovare, se ne esistono, numeri reali tali che .

Logaritmo

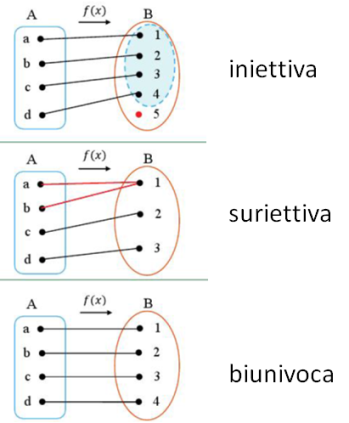
Dati , l’unica soluzione dell’equazione esponenziale viene detta logaritmo in base a di b e vene denotata con .

## Funzioni

Siano A,B due insiemi arbitrari e non vuoti e sia *f* una legge che ad **ogni** elemento di A associa **uno ed uno solo** elemento di B; la terna viene detta **funzione** o applicazione.

Una funzione si indica con o con dove:

* *x* è un generico elemento di A
* *f(x)* o *y* si chiama **punto** **immagine** di x ed appartiene all’insieme B
* l’insieme A viene chiamato **dominio** o **campo di esistenza** di *f(x)*
* il sottoinsieme di B formato dalle immagini di tutti gli elementi del dominio si chiama **codominio** di f*(x)*



Tipi di funzioni:

* + f(x) **iniettiva**

Ad elementi distinti dell’insieme A corrispondono elementi distinti di B

* + f(x) **suriettiva**

Ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A

* + f(x) **biunivoca**

suriettiva e iniettiva allo stesso tempo

* + f(x) **inversa** se è biunivoca, allora è definita la funzione inversa
  + **funzione composta**: dati , definiamo la funzione composta definita combinando e allora

Campo di esistenza

Siano X e Y due insiemi arbitrari ed f una legge che opera su alcuni o tutti gli elementi di X ad ognuno dei quali

associa un elemento di Y. Chiamiamo campo di esistenza di f l’insieme

Funzioni elementari

* funzione valore assoluto
* funzione potenza ed esponente intero
* funzione polinomiale
* funzione radice n-esima
* funzione esponenziale
* funzione logaritmo
* funzione seno
* funzione coseno
* funzione tangente
* funzione cotangente

Funzioni composte

* funzione combinazione lineare
* funzione prodotto
* funzione quoziente
* funzione composta

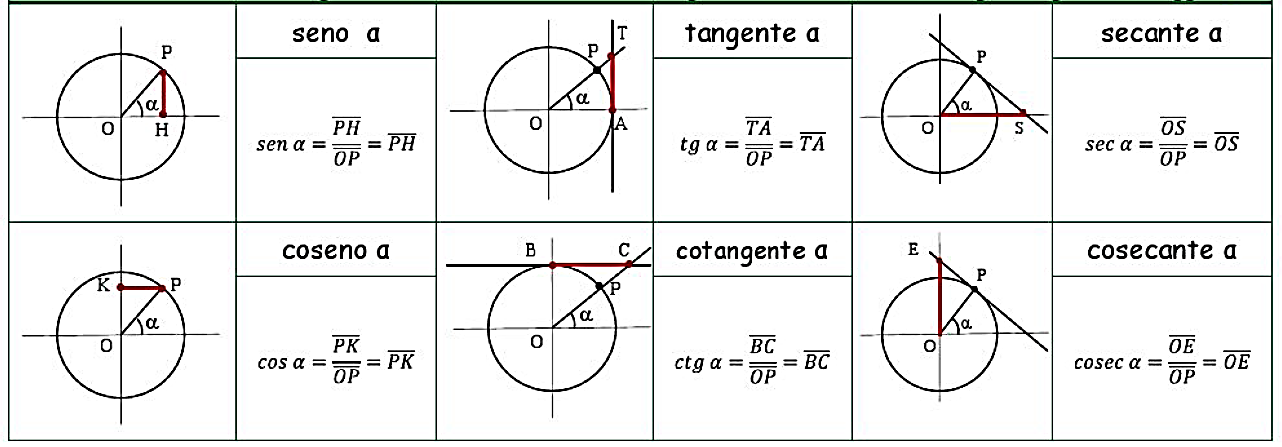
Funzione periodica

**Def.** Sia ; si supponga che l’insieme

abbia minimo . Diremo allora che f è periodica in con periodo . Siano , ed ; si supponga che l’insieme abbia minimo . Diremo allora che f è periodica con periodo .

## Funzioni goniometriche

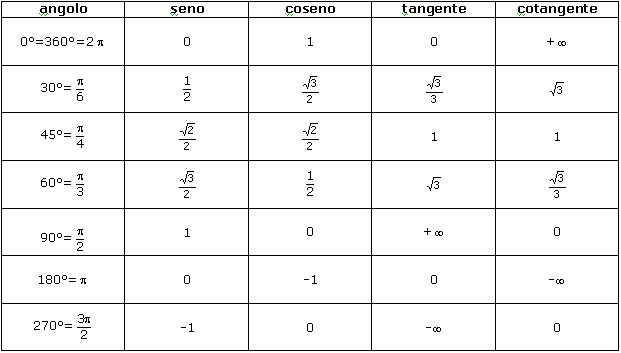
Data la circonferenza goniometrica di centro l’origine degli assi cartesiani e raggio 1 si definiscono le funzioni:



Le cinque relazioni fondamentali:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

Funzioni goniometriche di angoli ricorrenti:



# Successioni di numeri reali e suoi limiti

## Intervalli ed intorni

Il concetto di intervallo e di Intorno è essenziale per l'Analisi Matematica. Da notare che se guardiamo le cose da un punto di vista esterno parliamo di intervallo, mentre se assumiamo il punto di vista di un punto dobbiamo parlare di intorno. Quindi la diversità fra intervallo ed intorno dipende solamente dal punto di vista. Dal punto di vista di un osservatore esterno parleremo di intervallo, dal punto di vista del punto interno parleremo di intorno.

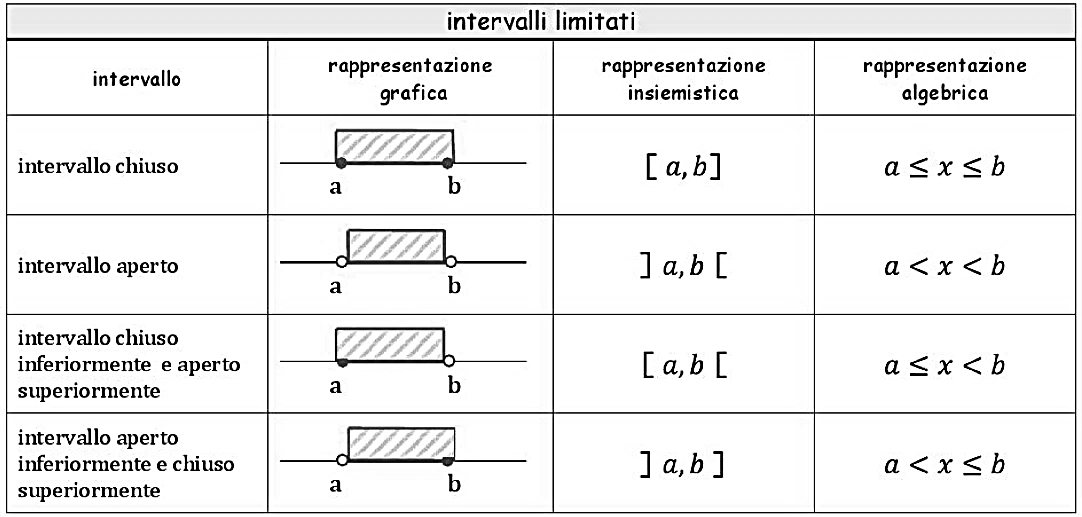
Intervallo

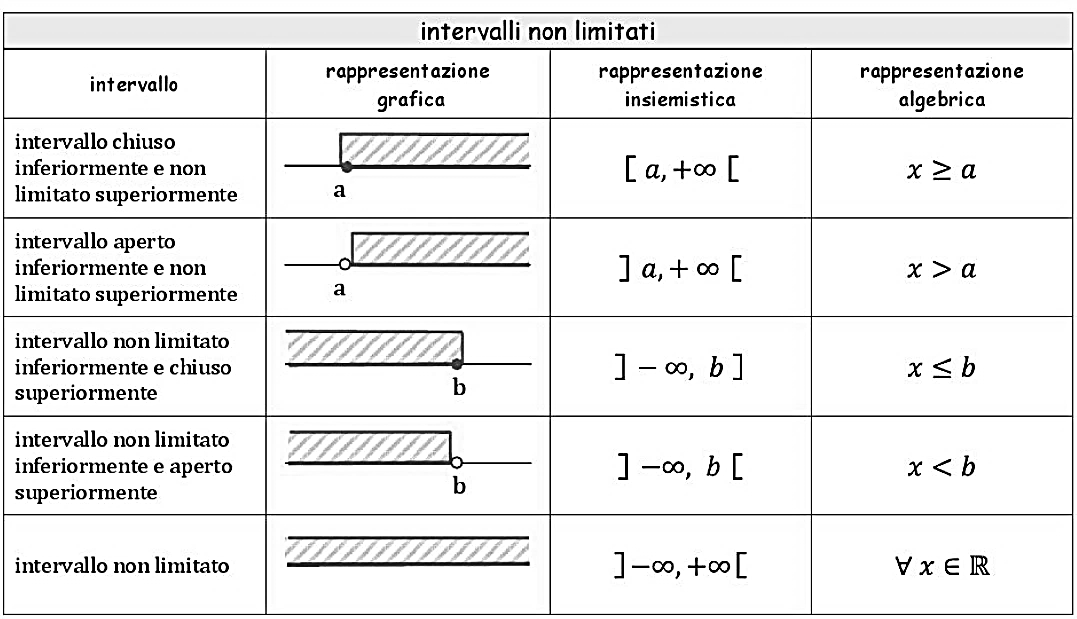
Si definisce intervallo l’insieme di tutti i valori compresi tra due estremi *a* e *b*. Gli estremi *a* e *b* possono essere finiti o

infiniti, *a* è detto *estremo sinistro* *o inferiore*, *b* è detto *estremo destro o superiore* dell’intervallo.

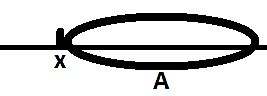
Un intervallo si dice:

* **limitato** se gli estremi sono finiti
* **non limitato** se almeno uno degli estremi è infinito
* **chiuso** se gli estremi sono compresi
* **aperto** se gli estremi non sono compresi





Punto di accumulazione

Un punto si dice di accumulazione per un insieme di punti se **in ogni intorno del punto vi è almeno un elemento dell’insieme, distinto dal punto stesso**. Almeno uno vuol dire che, visto che posso prendere infiniti intervalli sempre più piccoli, di punti ne conterrà infiniti. L’appartenenza del punto all’insieme non implica che il punto sia di accumulazione per l’insieme; la non appartenenza del punto all’insieme non implica che il punto non sia d’accumulazione per l’insieme.

*Es*. Sia ed ; appartiene ad A e dato che qualunque suo intorno si prenda vi è almeno un elemento dell’insieme A distinto dal punto stesso, è di accumulazione.

Sia ed ; non appartiene ad A ma dato che qualunque suo intorno si prenda vi è almeno un elemento dell’insieme A distinto dal punto stesso, è di accumulazione.

Sia ed ; non appartiene ad A e dato che si potrebbe prendere l’intorno il quale non sono elementi dell’insieme A, non è di accumulazione.

A questo proposito possiamo enunciare un piccolo teorema:

*Se un insieme infinito di punti è limitato allora ammette sempre un punto di accumulazione.*

Infatti se l'insieme è limitato vuol dire che si trova in un intervallo limitato e se è infinito io posso dividere l'intervallo a metà e almeno in una metà ci devono essere infiniti punti; posso ancora dividere ancora quella metà a metà e in una parte ci saranno sempre infiniti punti e così via di seguito, quindi poiché' in un mezzo intervallino ci saranno sempre infiniti punti allora in quell'intervallino dovrà esserci un punto di accumulazione.

Punto di frontiera

Un punto si definisce di frontiera quando appartiene al bordo dell'insieme. Da notare che un punto frontiera di un insieme può non appartenere all'insieme

*Es.* Se considero l’intervallo chiuso il punto 2 è un punto di frontiera che appartiene ad I. Se invece considero l’intervallo semiaperto a sinistra il punto 2 non appartiene all’intervallo I anche se è un punto di frontiera.

Punto aderente

Un punto si dirà aderente (o di aderenza) ad un insieme quando o appartiene all'insieme o è di accumulazione per

l'insieme stesso:

*Es.* Se considero l’intervallo semiaperto a sinistra il punto 2 non appartiene all’intervallo I però è un punto aderente all’insieme stesso insieme a tutti gli altri punti dell’intervallo [2,5].

## Successioni

Sia B un insieme arbitrariamente non vuoto. Chiameremo **successione** in B ogni funzione .

Una successione è un elenco ordinato costituito da una infinità numerabile di oggetti, detti **termini** della successione, tra i quali sia possibile distinguere un primo, un secondo, un terzo e in generale un n-esimo termine per ogni numero naturale n. Si denota il punto immagine *f(x)* dell’elemento con un simbolo del tipo detto **elemento generico** o **termine generale** della successione, mentre *n* viene detto **indice** dell’elemento , mentre indicheremo l’intera successione col seguente simbolo

*Es.* La successione dei numeri pari si scrive:

*Es.*

Verifica definitiva di una successione

Se, data una successione, esiste un indice tale che tutti i suoi termini avente indice non inferiore a

soddisfano una certa proprietà, diremo che la successione verifica quella proprietà **definitivamente**.

Si dice che una proprietà Pn è vera **definitivamente** se è vera “da un certo punto in poi”, cioè se è vera

*Es.* vera definitivamente

falsa definitivamente

Data quest’ultima definizione, dunque, si considera successione una qualunque funzione a valori reali che sia definita anche non , ma almeno definitivamente (quindi è ammesso un numero finito di valori per cui la successione non è definita).

Successione stabilizzata

Data una successione di numeri reali non negativi, con , si dice che essa è

**stabilizzata** se , la successione è definitivamente costante. Se è stabilizzata si può definire un

nuovo numero reale dove definitivamente ; in questo caso si dice che la

successione stabilizzata **determina** il numero reale *a* e si scrive .

*Es.* è una successione stabilizzata da in poi

## Limiti di successioni

Il problema che ci si pone allo studio di una successione è quello di determinare il comportamento dei suoi valori (o termini o elementi) al crescere di . I possibili comportamenti sono quattro:

1. esiste un numero reale a cui i termini della successione sono vicini definitivamente (**convergenza**)
2. i termini della successione definitivamente sono maggiori di qualunque numero (positivo) prefissato (**divergenza positiva**)
3. i termini della successione definitivamente sono minori di qualunque numero (negativo) prefissato (**divergenza negativa**)
4. nessuno dei fatti sopra descritti

Il **carattere** di una successione (cioè il suo comportamento al limite) non varia se alteriamo o trascuriamo un numero finito di termini.

Successione convergente

Diremo che la successione **converge** (o tende) ad se accade che per ogni tale che

per ogni risulta . In questo caso useremo una qualunque delle seguenti

notazioni

La precedente definizione può anche essere descritta come segue:

*Es.* Verificare che

Applichiamo la formula e semplifichiamo il primo membro

Continuiamo a calcolare la disequazione

Ponendo , dato che in questo caso abbiamo verificato ciò che volevamo, cioè che

*Es.* Verificare che

Applichiamo la formula e semplifichiamo il primo membro

Continuiamo a calcolare la disequazione

Ponendo dato che in questo caso abbiamo verificato ciò che volevamo, cioè che

Successione divergente positivamente

Diremo che la successione **diverge positivamente** (o tende a ) se accade che per ogni esiste

tale che per ogni risulta . In questo caso useremo una qualunque delle seguenti notazioni

La precedente definizione può anche essere descritta come segue:

*Es.* Verificare che

La relazione equivale a . Essendo dato che semplificando otteniamo

. Dunque se risulta verificata

Successione divergente negativamente

Diremo che la successione **diverge negativamente** (o tende a ) se accade che per ogni esiste

tale che per ogni risulta . In questo caso useremo una qualunque delle seguenti notazioni

La precedente definizione può anche essere descritta come segue:

Convergenza e divergenza positiva o negativa

Sia una successione a termini positivi. Se essa è convergente, il suo limite è non negativo; mentre se essa

diverge, il suo limite è .

Successione regolare e successione oscillante

Se si verifica uno dei casi contemplati nelle precedenti definizioni, la successione viene detta **regolare**; altrimenti

essa viene detta **oscillante o non regolare**.

*Es.* La successione è oscillante. Ogni suo termine vale 1 se occupa posto pari, -1 se occupa posto dispari.

Successione infinitamente grande

Diremo che la successione è infinitamente grande se accade che . In questo caso useremo una

qualunque delle seguenti notazioni:

## Teoremi sui limiti

Teorema di unicità del limite

Sia una successione regolare. Si hanno i seguenti casi:

1. se essa converge non può convergere a due limiti differenti fra loro
2. essa non può allo stesso tempo convergere e divergere
3. se essa diverge non può allo stesso tempo divergere positivamente e negativamente

Teorema della Permanenza del Segno Generalizzato

* Per successioni convergenti: Se allora esiste
* Per successioni divergenti: Se allora, per ogni esiste tale che .

Teorema del Confronto (dei carabinieri)

Informalmente dice che se abbiamo tre funzioni, la prima maggiore delle altre due (maggiorante) e la terza minore delle altre due (minorante) allora se sia la prima che la terza funzione tendono ad un limite finito l allora anche la seconda deve tendere allo stesso limite. Inutile dire che la prima e la terza funzione fanno da carabinieri e prendono in mezzo la seconda per portarla in prigione nel limite.

Siano tre successioni di numeri reali. Si hanno i seguenti fatti:

1. se esiste e allora anche
2. se esiste e allora anche
3. se esiste e allora anche
4. se esiste e le due successioni sono regolari, allora

Successione monotòna

Una successione si dice monotòna se essa verifica una delle quattro seguenti condizioni

1. (monotòna crescente)
2. (monotòna non decrescente)
3. (monotòna decrescente)
4. (monotòna non crescente)

Sia una successione monotòna. Allora essa è regolare. In particolare, se essa è non decrescente il suo limite è

l’estremo superiore (quindi essa è convergente se superiormente limitata, divergente positivamente in caso contrario), mentre se essa è non crescente il suo limite è l’estremo inferiore (quindi essa è convergente se inferiormente limitata, divergente negativamente in caso contrario).

Teorema di limitatezza delle successioni convergenti

Sia una successione convergente. Allora l’insieme numerico dei termini della successione è limitato.

Successioni estratte

Sia una successione di numeri reali e sia una successione crescente di numeri naturali; la successione

sarà chiamata **successione estratta** dalla successione (o sottosuccessione della successione ).

Sia una successione convergente. Allora ogni estratta converge allo stesso limite.

Sia una successione divergente a . Allora ogni estratta diverge allo stesso limite.

Successione aritmetica

Sia chiama **successione aritmetica di ragione** una successione tale che

Successione geometrica

Sia dato . Si chiama successione geometrica di ragione una successione il cui generico elemento è . Se , risulta

## Algebra dei limiti

|  |  |
| --- | --- |
| Operazioni sui limiti convergenti | Operazioni sui limiti divergenti |
| Sia due successioni convergenti e i rispettivi limiti. Valgono le seguenti proprietà:   * se * *Limite di una somma*: in modo intuitivo possiamo dire che **il** **limite di una somma è uguale alla somma dei limiti**; se ho due funzioni, la prima che tende a 5 e la seconda che tende a 7 per un certo valore di x allora la funzione somma mi tenderà a 12.   *Es*.siccome  e  avrò  Dunque, date due funzioni e  tali che e allora si ha     * *Limite di una differenza, prodotto e quoziente*: come sopra, con segni corrispettivi. |  |

Rapporto tra numeri reali, zero e più o meno infinito

Nell’algebra dei limiti valgono le seguenti regole:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

Frazioni

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Somma a infinito

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

Potenza

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Potenza a infinito

Forme indeterminate

Nel calcolo dei limiti si possono presentare le seguente sette forme dette indeterminate.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

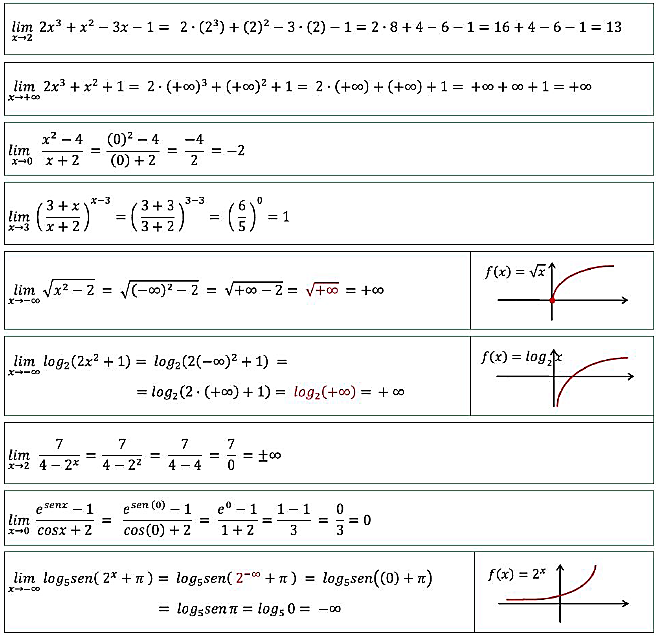
Affermare che un dato limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa che esso non è immediatamente calcolabile con una delle regole dei limiti. Vuol dire inoltre che è necessario semplificare o trasformare l’espressione data in modo da togliere, se possibile, l’indeterminazione.

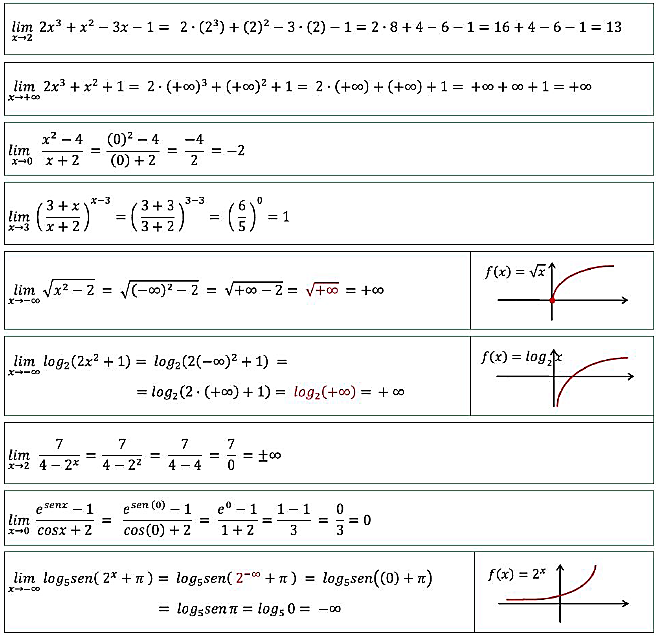
Calcolo dei limiti di funzioni algebriche con forme determinate

Per calcolare i limiti degli esempi proposti di seguito bisogna procedere nel seguente modo:

1. Si sostituisce a posto della *x* nel testo della funzione il valore a cui tende la *x* nel limite
2. Si sviluppano i calcoli tenendo conto dell’algebra classica, dell’algebra dei limiti e dei grafici delle funzioni elementari

*Es*.

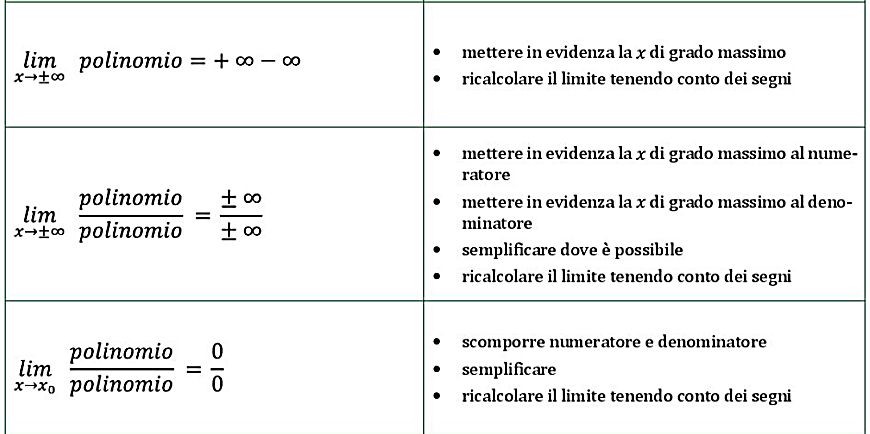




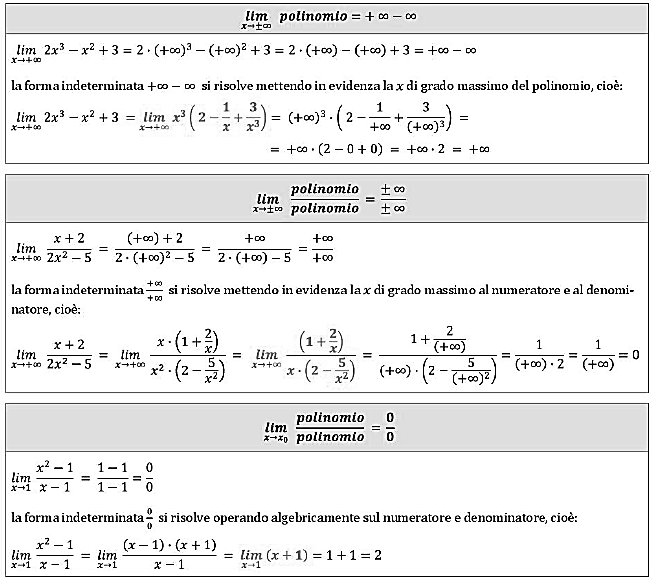
Calcolo dei limiti di funzioni algebriche con forme indeterminate

Se il limite delle funzioni algebriche è in forma indeterminata è possibile manipolare algebricamente il polinomio e la radice in modo da sciogliere la forma indeterminata.

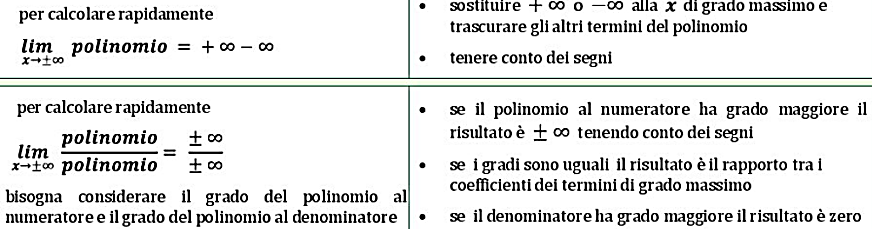
* Forme indeterminate comuni:



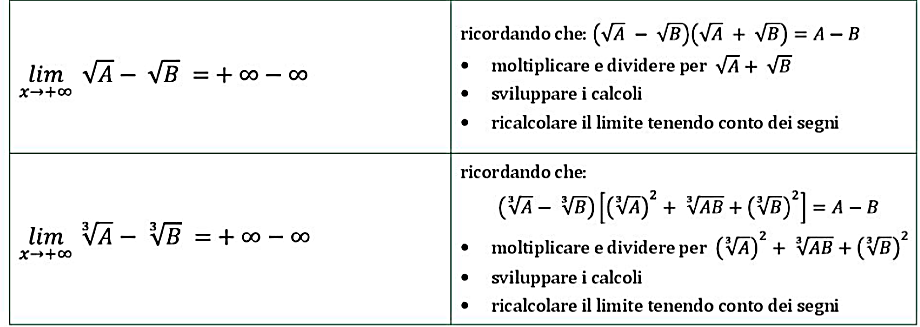
*Es.*



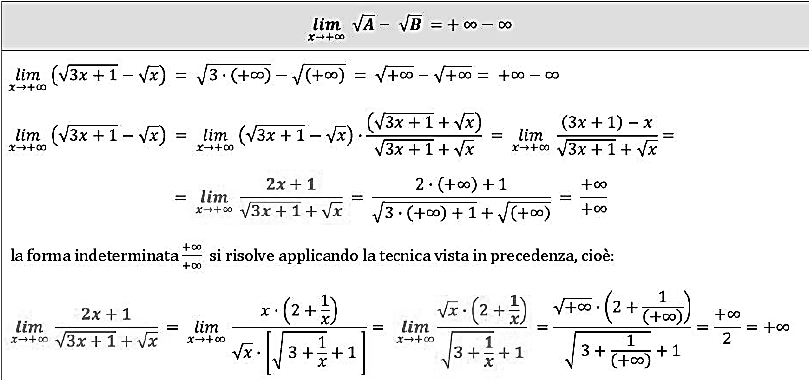
* Calcolo rapido:



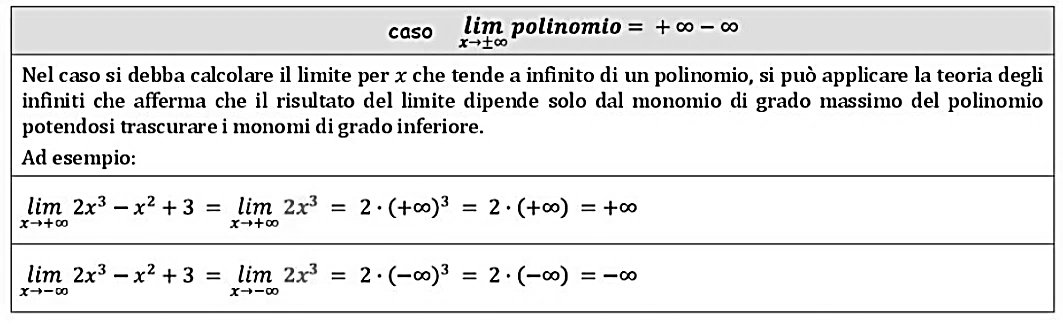
* Radici:

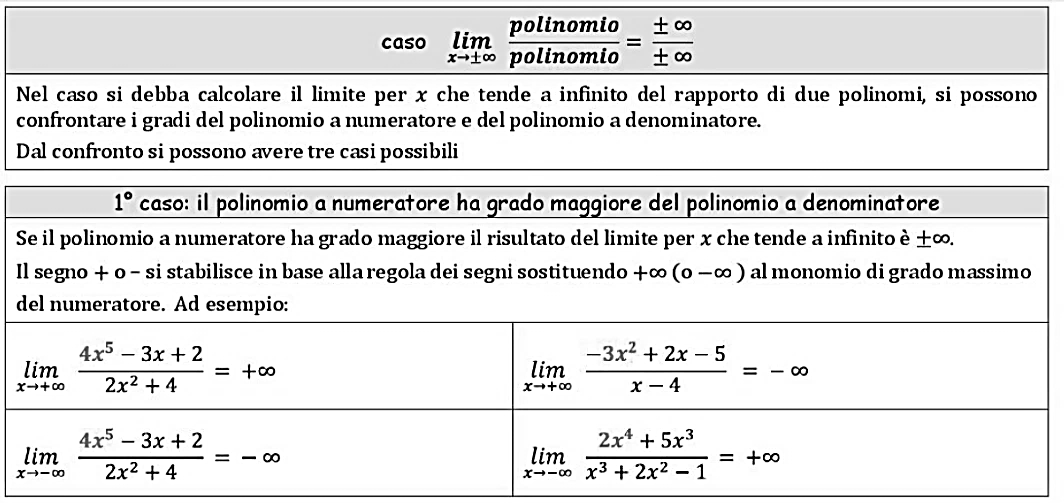


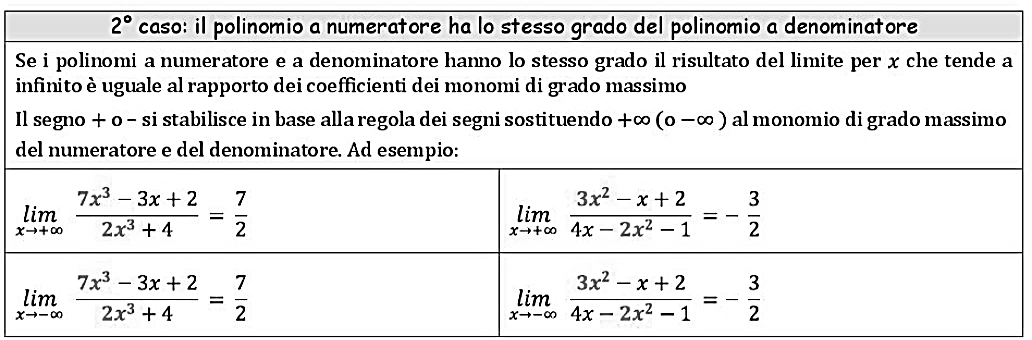
*Es.*

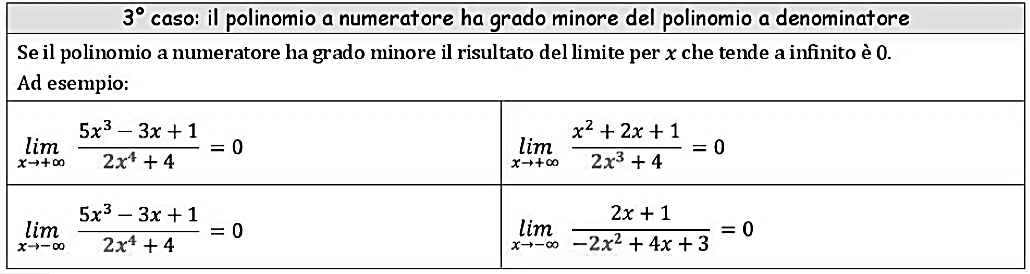


* Casi speciali:



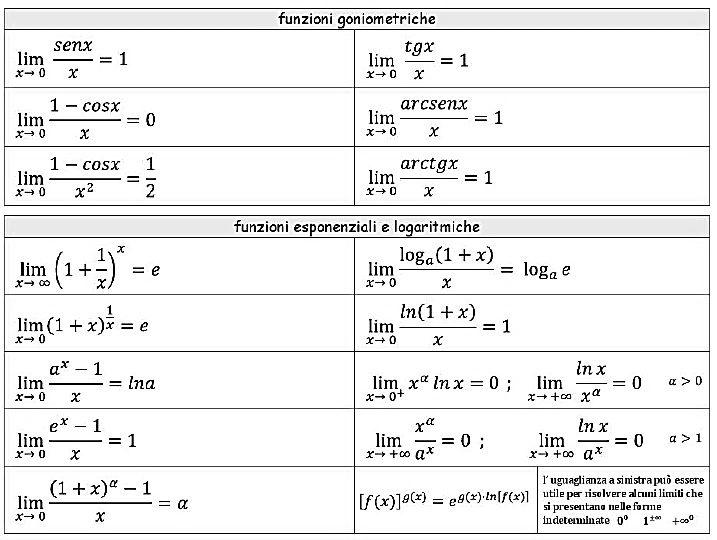




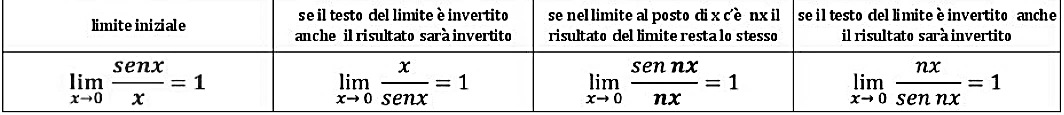


## Limiti notevoli

Sono qui presentati alcuni limiti notevoli utilizzati per una risoluzione più veloce di limiti che possono sembrare poco immediati.

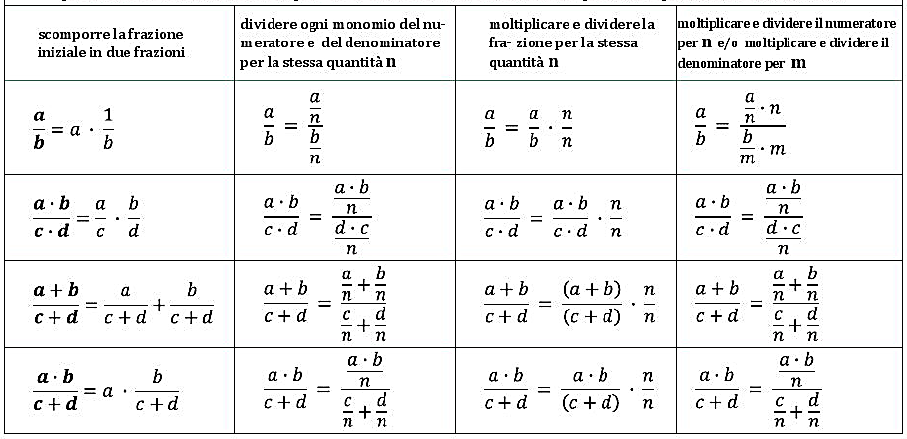


Ad ogni limite notevole si possono applicare le seguenti proprietà che lasciano invariato il risultato



Frazioni equivalenti

Per il calcolo dei limiti notevoli può essere utile ricordare alcune delle possibili operazioni con le frazioni:



# Serie di numeri reali

## Il carattere di una serie

Sia una successione di numeri reali (), indichiamo con la somma dei primi n+1 elementi della successione, cioè , definendo così un’altra successione con , che ha come base i termini di , ma i quali termini si sommano tra loro; tale successione è detta **successione delle somme parziali**, ed ha come termini:

Si chiama somme parziali perché li sommo fino ad un certo punto, ovvero *n*. In formule:

*NB*. Questa formula definisce una sommatoria di un numero finito di oggetti, non una serie.

La coppia di successioni con si chiama **serie numerica**. Una serie si denota con il simbolo

La quale indica la somma di tutti i termini della successione da fino all’infinito. Il termine è detto **termine generale** della serie. Studiare il **carattere** di una serie vuol dire determinare se la serie converge, possibilmente calcolandone la somma, o diverge o è indeterminata.

* Se la successione converge ad un numero S, diremo che la serie **converge** ed ha per somma S e scriveremo
* Se la successione diverge positivamente o negativamente, diremo che la serie **diverge positivamente o negativamente** e scriveremo

La serie si definisce, quindi, come il **limite delle somme parziali** per .

Se una serie converge viene detta **regolare** o **determinata**; in caso contrario viene detta **irregolare** o **indeterminata**.

*Es*. Consideriamo la seguente serie detta **serie telescopica** ; in questo caso la successione ha come

termine generale (infatti si ha ; quindi il carattere di una tale serie è determinato da quello della successione ; nel caso tale successione converga, la somma della serie è ovviamente .

La **serie di Mengoli**  è un esempio di serie telescopica poiché , questo vuol dire che quindi . Semplificandone i termini rimane solo , ovvero il primo e l’ultimo termine. Applicando il limite avremo sostituendo a *n* avremo , quindi . Dunque , cioè la serie converge ad 1 (la sua somma è 1).

Si chiamano telescopiche le serie in cui c’è questo fenomeno di cancellazione, e il nome è questo poiché si accorciano

poi come quando si chiude un telescopio.

*Es*. Consideriamo la serie detta **serie geometrica** di ragione q. Essa è una particolare serie con , dove q è la ragione ed n il parametro; sappiamo che per induzione che il termine generico della successione delle somme parziali è con . Tale successione:

* Converge se e solo se (o in altre parole ) con limite
* Diverge positivamente se e
* Diverge negativamente se e
* Indeterminata se

*Es.* Calcolare la somma della serie

La serie è considerata una serie geometrica di ragione . Poiché basta applicare la formula del limite e

avremo . Possiamo scrivere che la serie , e

*Es*. Calcolare la somma della serie

Il rapporto tra un termine della serie è il precedente è . Ci troviamo nello stesso caso, quindi la serie è

convergente e la sua somma è

*Es.* Consideriamo la seguente serie detta **serie armonica** , ovvero una sommatoria infinita dei reciproci dei numeri

naturali . Per studiarne il carattere ricordiamo che ; ne segue che . Possiamo così scrivere che

poiché anche . La serie armonica risulta quindi divergente positivamente.

*Es*. Per trovare la **frazione generatrice** di un numero periodico utilizziamo le serie geometriche:

diventa

All’interno delle parentesi abbiamo una serie di ragione alla quale applicata la formula delle serie geometriche diventa ; non ci resta che moltiplicarla alla somma di prima, la quale diventa

. Dunque la frazione generatrice di

Criterio di convergenza di Cauchy

Sia data una serie . Essa converge se e solo se vale la seguente Condizione di Cauchy, ovvero la condizione necessaria e sufficiente affinché converga:

*Dimostrazione*. converge converge . Fissato , troviamo , sia

, p arbitario e :

La Condizione di Cauchy non è soddisfatta dalla serie armonica, infatti siano si ha

*Corollario 1.* Sia data una serie convergente. Allora . Questo corollario non è altro che la **condizione necessaria per la convergenza di una serie**, ovvero se una serie è convergente, il suo termine generico (la successione ) tende a zero per .

*Dimostrazione*. Per ipotesi la serie converge a un *l*, cioè .

Essendo , dato che , e , , quindi .

*Es*. Data una serie numerica e fissato un numero , si chiama **serie resto k-esimo** la serie che viene usualmente denotata con . Diciamo informalmente che la serie resto di ordine *k* la serie si ottiene

cancellando i primi *k* termini della serie. Una serie ed un suo qualsiasi resto hanno lo stesso carattere poiché . La successione dei resti di una serie convergente è infinitesima.

da cui

*Corollario 2*. Sia convergente con definitivamente non crescente e . Allora .

*Proposizione 1*. Siano date due serie numeriche e e due numeri . Si hanno i seguenti risultati:

1. Se e allora converge con somma
2. Se converge e diverge, allora converge se , diverge se
3. Se converge e è indeterminata, allora è indeterminata se
4. Se è reale e converge e è reale e diverge positivamente, allora

diverge positivamente se , diverge negativamente se

1. Se e sono reali e divergono positivamente e , allora diverge positivamente se , diverge negativamente se
2. Se è reale e diverge positivamente e è reale e diverge negativamente e , allora diverge positivamente se , diverge negativamente se
3. Se e divergono o una diverge e l’altra è indeterminata nulla si può dire sul carattere di senza ulteriori ipotesi

Calcolo della somma di una serie

I passi da seguire per trovare il carattere di una serie sono:

1. Studio dei termini della successione
2. Calcolo del risultato delle somme parziali
3. Applicazione del limite delle per dare il carattere della serie

Per calcolare somma di una serie dobbiamo manipolare il numeratore e il denominatore con scomposizioni e raccoglimenti in modo da (come per i limiti) non far risultare nell’applicazione del limite una forma indeterminata, ma un termine ben preciso.

*Es*. Calcolare la somma della serie avente come termine della successione

riducendo ottengo , calcolo ora il limite per .

Possiamo dunque concludere che la serie è convergente ed ha per somma

Possiamo usare i seguenti teoremi di calcolo:

* Il carattere di una serie non si altera se si moltiplicano (o dividono) tutti i suoi termini per una stessa costante *c* diversa da zero, in particolare, se la serie è convergente, moltiplicandone tutti i termini per una costante si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma della serie data moltiplicata per tale costante.
* Sommando termine a termine due serie convergenti si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma delle somme delle serie data.

*Es*. Calcolare la somma della serie

La serie si può riscrivere con

* Sopprimendo un numero finito di termini da una serie, il carattere di essa non cambia; se la serie è convergente, sopprimendo un numero finito di termini, la sua somma risulta diminuita della somma dei termini soppressi.

## Serie a termini reali di segno costante

*Teorema 1.* Sia una serie a termini non negativi. Allora essa converge oppure diverge positivamente

*Dimostrazione*. Una serie con definitivamente ha (successione monotona crescente), ed ha quindi solo due possibilità: convergere, o divergere a .

*Es*. Si consideri la serie detta **serie armonica generalizzata**; dopo il Corollario 2 del Criterio di convergenza di Cauchy e il Teorema 1 qui sopra abbiamo notato:

analogamente

Dove .

Teorema di Confronto

Siano due serie a termini non negativi tali che esista per cui . Allora:

1. Se converge, anche converge
2. Se diverge, anche diverge

*Dimostrazione.* Sia e . Assumiamo che

Ci sono due situazioni:

1. Se converge allora
2. Se diverge allora

*Es.* La serie converge perché per ogni

*Corollario 1*. Conosciuto anche come **Teorema di Confronto Asintotico**, siano due serie a termini positivi

tali che esista . Allora le due serie hanno lo stesso carattere, cioè se una converge, converge anche l’altra, se una diverge, diverge anche l’altra.

*Dimostrazione*. Se , allora definitivamente. Moltiplico per ed ottengo .

1. converge converge converge (teorema Carabinieri)
2. (teorema Carabinieri)

*Es*. brutalmente è la serie armonica generalizzata, quindi diverge perché

armonica con . Il confronto asintotico lo facciamo con .

Quindi si comporta come , cioè diverge, mentre il loro rapporto converge.

*Corollario 2*. Siano due serie a termini positivi tali che esista . Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se converge, anche converge
2. Se diverge, anche diverge

*Dimostrazione.* È sufficiente osservare che, definitamente, si ha applicando quindi il Teorema di Confronto.

Allo stesso modo si dimostrano i seguenti corollari.

*Corollario 3*. Siano due serie a termini positivi tali che esista . Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se converge, anche converge
2. Se diverge, anche diverge

*Corollario 4*. Siano due serie a termini positivi tali che , definitivamente. Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se converge, anche converge
2. Se diverge, anche diverge

Criterio del Rapporto (D’Alembert)

Sia una serie a termini positivi. Supponiamo che esistano ; allora la serie converge. Se invece esiste allora la serie diverge.

*Dimostrazione*. Dall’ipotesi segue che . Procedendo per induzione vediamo che , disuguaglianza che significa che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale , che è una serie geometrica convergente poiché ha ragione . Nel caso della seconda ipotesi invece, la successione è definitivamente non decrescente e quindi non può convergere a zero; allora, la serie non può convergere e deve necessariamente divergere.

*Es*. converge poiché si ha Ad esempio posto avremo che è maggiore di

*Corollario*. Sia una serie a termini positivi. Si hanno i seguenti fatti:

1. Se allora la serie converge
2. Se allora la serie diverge

*Dimostrazione*. Per l’ipotesi (i)

Poiché possiamo scegliere in modo che , quindi la serie converge.

Per l’ipotesi (ii) e , quindi la serie diverge.

*Es*. applichiamo il criterio semplificando viene questo è un limite .

La serie converge.

Criterio della Radice (Cauchy)

Sia una serie a termini non negativi. Supponiamo che esistano ; allora la serie converge. Se invece esistono infiniti tali che , allora la serie diverge.

*Dimostrazione*. Dall’ipotesi segue che , così che possiamo affermare che la

serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale , che è una serie geometrica convergente perché con ragione . Se invece per infiniti indici, allora la successione non può convergere a zero; la serie non può convergere e deve necessariamente divergere.

*Corollario*. Sia una serie a termini non negativi. Si hanno i seguenti fatti:

1. Se allora la serie converge
2. Se allora la serie diverge

*Dimostrazione*. Per l’ipotesi (i)

Poiché possiamo scegliere in modo che , quindi la serie converge.

Per l’ipotesi (ii) e , quindi la serie diverge.

*Es*. Applichiamo il criterio

Criterio di Raabe

Sia data la serie a termini tutti positivi. Supponiamo che esistano un numero ed un indice si ha

* allora la serie è convergente
* allora la serie è divergente

*Dimostrazione*. Convergenza con il Criterio di Kummer con , divergenza con il Criterio di Kummer con

*Corollario*. Sia data la serie a termini tutti positivi. Supponiamo di avere:

* 1. Se allora la serie converge
  2. Se allora la serie diverge

*Dimostrazione*. Dato che per definizione di limiti di successioni avremo che

Facendo qualche passaggio otteniamo

dato che questa è una serie armonica moltiplicata per una costante, posso scrivere

dove

Per il criterio del confronto risulta che

Criterio di condensazione di Cauchy

Sia data una serie a termini non negativi tale che la successione sia non crescente (). Allora, la serie data ha lo stesso carattere della serie

* Se la serie diverge, allora anche diverge
* Se la serie converge, allora anche converge

*Es*. Studiare la serie al variare di . Poiché la serie data è una serie a termini positivi ed

, possiamo utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy; dobbiamo allora studiare la serie

seguente: che può essere studiata con il criterio del

rapporto da cui segue che

Ne viene che la serie in esame converge se , con arbitrario e diverge se con arbitrario; se nulla possiamo dire.

## Serie a termini di segno alterno

Sono serie a segno alterno del tipo con

Criterio di Convergenza di Leibnitz

Sia data una serie del tipo dove tutti gli sono numeri positivi. Supponiamo che

1. (legato alla condizione necessaria di convergenza)
2. definitivamente (cioè non crescente)

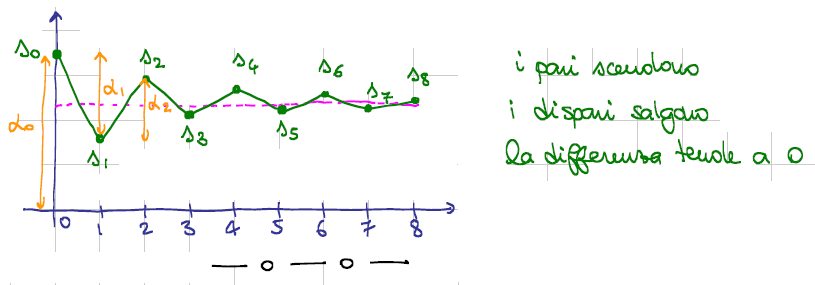
In tal calo la serie converge.

*Dimostrazione*. Devo dimostrare che la successione delle somme parziali converge. Consideriamo

Dato che è non crescente (ad esempio in faccio ma aggiungo che è più piccolo della differenza ), dunque ma , gli pari scendono mentre gli s dispari salgono, dimostrando la (ii). Inoltre dico che

. Allora avremo che e . Vorrei concludere che , ma , ovvero , dimostrando la (i).

Graficamente rappresento le nel modo seguente:



*Corollario*. Sia data una serie del tipo dove tutti gli sono numeri positivi. Supponiamo che

1. (legato alla condizione necessaria di convergenza)
2. definitivamente (cioè non crescente)

Allora, detta S la somma della serie ed la successione delle somme parziali, si ha .

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione del Criterio di Leibnitz segue che . Quindi risulta, per pari e per n dispari

*Condizioni sufficienti affinché una serie a segno alterno è indeterminata*. Sia data la serie a termini reali e si

supponga che sia definitivamente monotona. Allora la serie data non può divergere, quindi se

, la serie è indeterminata.

Maggiorazione dell’errore

I termini della successione delle somme parziali di una serie convergente forniscono un’*approssimazione* del risultato della somma della serie stessa, poiché è in generale difficile riuscire a determinare l’esatto valore della somma di una serie convergente. Ma affinché tale approssimazione sia veramente utile sarebbe importante conoscere una *maggioranza dell’errore* che si commette, ovvero l’insieme di termini entro i quali vi è la possibilità di trovare la somma esatta, sostituendo al valore di una somma di una serie convergente un opportuno termine della successione delle somme parziali della stessa serie, in modo da valutare la velocità con cui la successione delle somme parziali approssima la somma della serie.

Sia data una serie convergente. Esista poi una serie convergente tale che e della quale sia nota la somma B. allora posto e dette le rispettive successioni delle somme parziali, si ha che

*Es*. Consideriamo la serie ed applichiamo ad essa il Criterio del Rapporto, deducendo che ddetta S la

somma di tale serie, si ha che

che è la maggiorazione richiesta.

*Maggiorazione dell’errore nel teorema di Leibnitz.* Sia data la serie dove tutti gli sono numeri positivi.

Supponiamo che



Allora, detta la somma della serie ed la successione delle somme parziali, si ha

*Dimostrazione*. Dalla dimostrazione del criterio di Leibnitz segue che

Quindi risulta, per n pari

Per n dispari

## Convergenza assoluta, serie logaritmica e serie esponenziale

Criterio dell’assoluta convergenza

Il Criterio della Convergenza assoluta viene utilizzato quando i termina di una serie reale non sono di segno costante né di segno alterno. Esso viene comunque usato per dimostrare la convergenza di serie generali.

Data una serie numerica diremo che essa converge assolutamente se converge a serie . Lo studio di tale serie può essere dunque effettuato più agevolmente dello studio della serie iniziale perché essa è a termini reali non negativi, e quindi possiamo utilizzare un buon numero di criteri. Dall’assolua convergenza segue la convergenza, ma non il contrario.

*Dimostrazione*. . Basta dimostrare che le ultime 2 serie

convergono. La 1° converge per ipotesi. Per la 2° osservo che

Per dimostrare queste due uguaglianze basta considerare il caso (in cui viene e il caso

(in cui viene ). Ora applico il criterio del confronto: converge per ipotesi,

dunque , che è a termini , converge pure lui.

*Teorema*. Ogni serie numerica assolutamente convergente è convergente.

*Dimostrazione*. La dimostrazione è conseguenza del teorema dell’applicazione del Criterio di Convergenza di Cauchy alle serie e , una volta che si tenga conto della ben nota disuguaglianza

*Es*. . Devo studiare il valore assoluto di , ovvero , quindi

, quindi converge per il Criterio di Leibnitz, ma non assolutamente (indeterminato)

*Es.* . Ho che che converge, quindi converge

*Es*. Sia una serie numerica reale e sia una applicazione biunivoca; la serie si chiama **riordinamento** della serie data. La serie viene detta **incondizionalmente convergente** se ogni suo riordinamento converge, e in questo caso si dice anche che gode della **proprietà commutativa**. Le serie a termini positivo godono della proprietà commutativa, ma questo non è vero in generale per una serie infinita di addendi. Per esempio, una serie oscillante i cui termini pari siano -1 e quelli dispari 1 è oscillante, ma se si disordinano gli addendi la serie risultante può essere divergente.

*Es*. Conosciuto anche come **Teorema di Riemann-Dini**, sia una serie convergente ma non assolutamente convergente, e sia . Allora esiste la permutazione

Informalmente, il teorema afferma che se una serie è (semplicemente) convergente, ma non assolutamente convergente, allora, dato un qualsiasi numero reale, esiste una permutazione dei suoi termini che la rende convergente a tale numero; inoltre, esistono permutazioni dei termini che rendono la serie divergente a e a .

Serie logaritmica

Una serie logaritmica è una serie del tipo

e si sviluppa con il seguente calcolo

* Se la serie converge
* Se la serie diverge
* Se quindi la serie diverge

Serie esponenziale

Una serie esponenziale è una serie del tipo

Si può dimostrare che questa serie converge e risulta

si ha dunque che

*Dimostrazione*. Applicando il criterio del rapporto, abbiamo questo rapporto converge a 0, dunque la serie

esponenziale è convergente .

Un altro modo per definire il valore è proprio come somma della serie esponenziale per , cioè

